

## Задача А. Ксоня та олімпіада

Автор та розробник: Святослав Відзіля

Оскільки одна група завжди заходить в 0 секунд, а далі кожні  $w$  секунд, поки час не закінчиться. Нескладно помітити, що всього зайде  $\lfloor t/w \rfloor + 1$  груп. Тут символами  $\lfloor x \rfloor$  позначено округлення вниз — найбільше ціле число менше рівне за  $x$ . У кожній групі максимум  $m$  людей, а всього людей  $n$  (більше за це число людей зайти просто не може), звідки отримуємо пряму формулу для відповіді —  $\min(n, m \cdot (\lfloor t/w \rfloor + 1))$ .

## Задача В. Ксоня та алфавітне коло

Автор та розробник: Святослав Відзіля

Спробуємо обмежити довжину відповіді. Оскільки в англійському алфавіті 26 букв, то відповідь не може бути довшою за 26. Знайдемо для кожного можливого початку довжину найдовшого алфавітного рядка, який з нього починається. Виберемо максимальний. Через обмеження довжини відповіді ми не будемо перевіряти кожний раз більше за 26 символів, отже рішення працює за  $26 \cdot n$ .

Для спрощення реалізації, можна занумерувати коло від 0 до  $n - 1$ , тоді наступний індекс після індексу  $i$  це  $(i + 1) \bmod n$ , де  $x \bmod y$  — залишок від ділення числа  $x$  на число  $y$ .

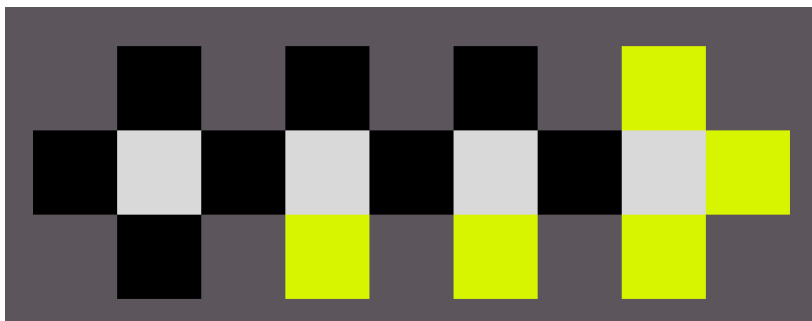
## Задача С. Ксоня та двокольорова фігура

Автор та розробник: Святослав Відзіля

Спочатку знайдемо, коли відповіді немає.

Порахуємо найбільшу площу фігури, в якій  $x$  чорних клітинок. Будемо фарбувати нашу фігуру. На першому кроці зафарбуємо будь-яку чорну клітинку в жовтий колір, а всіх її сусідів (білі клітинки) в синій. На кожному наступному колі будемо фарбувати будь-яку чорну клітинку, яка сусідня з синьою в жовтий, і всіх її сусідів в синій. Так, рівно за  $x$  кроків ми розфарбуємо всю фігуру (бо чорних клітинок рівно  $x$ ). На першому колі ми фарбуємо максимум 5 клітинок, на кожному наступному - максимум по 4. Тому, максимальна площа такої фігури -  $4x + 1$ .

Якщо  $4 \cdot \min(w, b) + 1 < w + b$  відповіді немає. Інакше, покажемо одну з конструкцій, як можна досягти будь-якої відповіді. Без обмеження загальності, нехай  $w < b$ . Розташуємо білі клітинки в ряд, через одну. Між ними поставимо чорні клітинки. (Це можливо, бо  $w < b$ ). Далі, всі чорні клітинки, що залишилися можна додати до будь-якої вільної чорної клітинки зверху, знизу, або збоку. Очевидно, що така фігура досягає потрібної площі і подібне рішення нескладно реалізується.



Тут зображений варіант конструкції. Жовтим відмічені місця, куди можна додавати чорні клітинки.

## Задача D. Ксоня та граф

Автор та розробник: Святослав Відзіля

Можна набрати часткові бали розв'язками за допомогою алгоритмів Дейкстри та Флойда, які шукають діаметр в довільному графі.

Щоб отримати вищі бали знайдемо особливість графу з умови. Оскільки граф з  $n - 1$  ребром утворює дерево, то граф з  $n$  ребер утворює дерево з одним циклом. Будемо розглядати граф, як цикл і кореневі дерева, з коренями в вершинах циклу. Далі є два різних випадки, де може бути діаметр. Або діаметр цього графа знаходиться в одному з дерев, або проходить через цикл.

Для першого випадку нескладно скористатися будь-яким відомим алгоритмом пошуку діаметра в дереві та для кожного дерева знайти діаметр сумарно за  $O(n)$ .

Для другого випадку важливо зрозуміти, що якщо діаметр проходить через дві вершини циклу (назвемо їх  $u$  і  $v$ ), то та частина діаметра, яка знаходиться в деревах з цими коренями доходить до найглибшого листа в такому дереві. Дійсно, якби вона доходила не до найглибшого листа, можна було б легко покращити відповідь, пішовши від вершини до найглибшого листа.

Знайдемо для кожної вершини циклу глибину найбільшого листа в її дереві (за допомогою dfs-y). Назвемо це число для  $i$ -ї вершини  $h_i$ . Назвемо відстанню між двома вершинами в циклі  $dist(x, y)$  найкоротшу відстань по ребрах циклу між вершинами  $x$  і  $y$ . Тепер задача зветься до максимізації  $h_x + h_y + dist(x, y)$  по усім  $x, y$  на циклі.

Як ефективно порахувати  $dist(x, y)$ ? Перенумеруємо вершини циклу від 1 до  $m$ . Запишемо всі ваги ребер циклу в масив  $w$ , так що вага ребра з вершини  $i$  циклу в наступну записана в  $w_i$ . Нехай  $\sum_i^m w_i = S$ . Тоді порахуємо відстань, якби ми йшли по одній стороні циклу  $f(i, j) = \sum_{k=i}^{j-1} w_k$ . В іншому випадку, ми йдемо по іншій стороні циклу, тому використовуємо всі інші ребра. Тому  $dist(i, j) = \min(S - f(i, j), f(i, j))$ .

Вже зараз задачу можна розв'язати на високий бал за  $O(n^2)$ , рахуючи шукану величину по всім вершинам циклу.

Для отримання повного балу можна помітити, що при фіксованому  $i$  існує таке  $k$ , що при всіх вершинах  $j$  від  $i$  до  $k$   $f(i, j) < S - f(i, j)$ , а при всіх вершинах  $j$  від  $k$  до  $i$   $f(i, j) \geq S - f(i, j)$ . Іншими словами, функція монотонна. Для всіх вершин з першої групи відстань дорівнює  $f(i, j) = p_{j-1} - p_{i-1}$  (Якщо ввести масив  $p$  - префіксних сум масиву  $w$ ), а діаметр на таких вершинах зводиться до  $\min(h_x + h_y + p_{y-1} - p_{x-1}) = \min((h_x - p_x - 1) + (h_y + p_{y-1}))$ . При фіксованому  $x$  такий мінімум по всіх  $j$  можна легко знайти за допомогою різних структур даних - дерева відрізків, підтримуючи множину усіх кандидатів і т.д. Сума для другої групи вершин схожа і підтримується аналогічно. Для пошуку оптимального  $k$  можна використовувати бінарний пошук, або підтримувати  $k$  методом двох вказівників.

При використанні сетів або дерева відрізків з'являється додатковий логарифмічний фактор, тому асимптотика рішення  $O(n \log n)$ .

## Задача Е. Ксоня та дерево

**Автор та розробник:** Святослав Відзіля

Спробуємо розв'язати задачу, якщо в нас вже множина чисел  $S$  з піддерева і нам потрібно знайти  $k$ -е число з множини всіх можливих XOR-сум підмножин.

У випадку, якщо всі числа є степеню двійки можна помітити, що якщо число  $\epsilon$  в наборі, то ми можемо або додати його у відповідь, або ні. Так можна зробити з кожним бітом, тому всього буде в множині  $2^{|S|}$  чисел. Побудувати  $k$ -е число можна жадібно - будемо йти з найбільших чисел до найменших. Якщо ми можемо не ставити якийсь біт (чисел з цим бітом не встановленим  $\geq k$ ), то ми не будемо його ставити. Інакше, поставимо цей біт і зменшимо  $k$  на кількість чисел, в яких цей біт не встановлений.

Для розв'язання задачі в загальному вигляді потрібно розглянути числа, як набір векторів над полем  $Z_2$ . Тоді, хог двох чисел - це додавання цих векторів. Тому, для знаходження всіх можливих хог-ів підмножин, можна побудувати базис векторів, які представляють числа з множини  $S$  і подібно до рішення в минулому пункті жадібно встановлювати біти від більшого до меншого. Побудова базису може бути реалізована за  $O(\log^3 A)$  (Може бути пришвидшено в 32 рази використовуючи бітові операції на числах), а пошук  $k$ -го елемента в побудованому базисі - за  $O(\log A)$ .

Тепер, повернемося до оригінальної задачі. Для перших трьох підгруп було достатньо знайти всю множину чисел пошуком вглибину, а далі використати розв'язок з першої частини.

**Блок 1** Будь-який повний перебір за  $O((n + q)2^n)$  проходив цей блок.

**Блок 2-3** Блок проходився якщо перераховувати базиси для всіх вершин за  $O(n)$ , або знаходити кожний раз заново.

**Блок 4** Можна реалізувати задачу для множини чисел, а не дерева.

**Блок 5** Якщо в підгрупі немає запитів на зміну числа, то можемо передрахувати всі базиси для кожної вершини дерева - базис вершини це просто базис чисел з базисів її дітей. Це можна порахувати за  $O(n \log^2 A)$ , а далі відповідати за запити за  $O(\log A)$ .

**Блок 6** Блок вирішувався простішим варіантом базису, достатньо було перевірити наявність потрібного біта в піддереві.

**Блок 7** У загальному випадку, можемо звернутися до техніки Ейлерового обходу дерева. Побудуємо за Ейлеровим обходом дерева дерево відрізків, де в кожній вершині буде зберігатися XOR базис її підвідрізка. Для мерджа двох вершин додамо вектори одного базису в інший. Піддереву кожної вершини тепер буде цілісним відрізком на Ейлеровому обході, а отже запит базису на піддереві зводиться до одного запиту до дерева відрізків, а запит зміни числа - до одиничної заміни в дереві відрізків. Реалізація такого дерева відрізків працює за  $O(\log^2 A \log n)$  на запит, тому все рішення працює за  $O((n + q) \log^2 A \log n)$ .

## Задача А. Козак Вус та таємний лист

Автор та розробник: Андрій Романов

Є  $a \cdot b \cdot c$  способи придбати один конверт, одну марку з шароварами та одну марку з вишиванкою,  $a \cdot b$  способи придбати один конверт і одну марку з вишиванкою і  $a \cdot c$  способи купити один конверт і одну марку з шароварами. Тому загальна кількість способів здійснити покупку рівна  $a \cdot b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c$ .

## Задача В. Козак Вус та чарівні черевики

Автор та розробник: Андрій Романов

Намалюємо дерево з направленими вниз ребрами та коренем у вершині 1, яке буде зображати всі можливі комбінації застосування заклять. З вершини  $x$  можна перейти вниз у вершини  $2 \cdot x$  та  $2 \cdot x + 1$ , адже, маючи швидкість  $x$  метрів на секунду, за допомогою одного закляття швидкість може стати рівною  $x + x = 2 \cdot x$  метри на секунду або  $x + (x + 1) = 2 \cdot x + 1$  метри на секунду. Кожен раз, спускаючись вниз, від кореня ми переходимо або в лівий вузол, тобто застосовуємо перше закляття або в правий вузол — застосовуємо друге закляття. Кожна вершина зустрічатиметься рівно один раз, а отже порядок застосування заклять, щоб потрапити з вершини 1 у вершину  $x$  єдиний, причому необхідна кількість заклять рівна відстані від 1 до  $x$ . Помітимо, що на відстані 0 від кореня знаходиться вершина 1, на відстані 1: 2, 3, на відстані 2: 4, 5, 6, 7, на відстані 3: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 і так далі. Тобто на відстані  $n$  від кореня знаходяться числа від  $2^n$  до  $2^{n+1} - 1$ , і щоб їх досягти ми відповідно застосовуємо закляття  $n$  разів.

Отже, якщо  $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ , то відповідь  $n$ . Інакше кажучи,  $n = \lfloor \log k \rfloor$ . Складність розв'язку  $O(\log k)$ .

## Задача С. Козак Вус та залізнична дорога

Автор та розробник: Андрій Романов

Цю задачу можна вирішувати багатьма способами, я наведу один з них.

**Блок 1.** Можемо зробити повний перебір по всіх розстановках ліхтарів і перевірити, чи хоча б одна з них задовольняє умові задачі. Складність такого розв'язку  $O(n! \cdot n)$ .

**Блок 2.** Для зручності будемо називати ті  $n/2$  ліхтарі, що мають один і той самий колір червоними. Розставимо  $n/2 - 1$  червоні ліхтарі на верхню гілку і між ними поставимо  $n/2 - 1$  не червоних ліхтарів, в тому числі один з них на перехресті. В нас лишився один червоний і один не червоний ліхтар (назвемо його особливим). Якщо  $k \geq 3$ , то за потреби замінимо особливий ліхтар на не червоний такий, колір якого відрізняється від кольору ліхтаря на перехресті та два ліхтарі, що в нас лишилися поставимо на нижню гілку. Якщо ж  $k = 2$ , то обов'язково кількість ліхтарів кольору 1 і кольору 2 буде рівна як на верхній, так і на нижній гілках, але через те, що ліхтар на перехресті враховується двічі, загалом кількості ліхтарів цих двох кольорів будуть відрізнятися. Отже, при  $k = 2$  відповідь в цьому блоці завжди  $-1$ .

**Блок 3.** З обмежень блоку випливає, що будь-які два ліхтарі будуть мати різні кольори, відповідно й будь-які два сусідні ліхтарі точно будуть різних кольорів. Розставимо ліхтарі довільним чином, наприклад  $n - 3$  з них поставимо на верхню гілку, 1 на перехрестя і 2 на нижню гілку. Таке розташування задовольняє умові.

**Блок 4.** Як і в першому блоці можемо перебрати всі можливі розстановки. Складність такого розв'язку  $O(2^n \cdot n)$ .

**Блок 5.** Як на верхній, так і на нижній гілці кількість одиниць і двійок буде однаковою, але одиниця/двійка на перехресті буде врахована два рази, а отже кількість одиниць/двійок на один більша за кількість двійок/одиниць. Отже, якщо  $n$  парне або кількості одиниць і двійок відрізняються хоча б на 2, то відповідь  $-1$ . Інакше розставимо  $(n+1)/2$  одиничок і  $(n-1)/2$  двійок. Випадок, коли двійок більше розглядається аналогічно. Якщо  $n = 5$ , то нам не вдасться розставити ці ліхтарі вздовж залізничної дороги, адже завжди знайдуться два сусідні ліхтарі одного кольору. Інакше поставимо ліхтар 2 на перехрестя. Розставимо  $n - 4$  ліхтарі в порядку 121...21 на верхній гілці. Тепер розставимо 3 ліхтарі 121 на нижній гілці. Задане розташування задовольняє умові задачі.

**Блок 6.** Назвемо ліхтар максимальним, якщо ліхтарів такого ж кольору як в нього найбільше серед інших ліхтарів, мінімальним, якщо ліхтарів його кольору найменше серед інших. На обидвох гілках максимальних ліхтарів не може бути більше ніж сумарно ліхтарів інших кольорів, бо інакше

б якісь два максимальні ліхтарі стояли поруч. При цьому перехрестя враховувалося два рази, тому якщо на перехресті стоїть не максимальний ліхтар, то кількість максимальних ліхтарів може бути більшим на 1 за кількість ліхтарів всіх інших кольорів. Отже, якщо кількість максимальних ліхтарів хоча б на 2 більша за сумарну кількість всіх інших ліхтарів, то відповідь  $-1$ , інакше розв'язок існує.

Поставимо на перехрестя мінімальний ліхтар. Тепер будемо виставляти на верхню гілку максимальний і мінімальний ліхтарі на цей час по черзі. Будемо продовжувати цей процес доки в нас не залишаться ліхтарі лише одного кольору. З обмежень, які ми розглянули в минулому абзаці в нас може залишитися не більше двох ліхтарів одного кольору. Можна показати, що останній ліхтар на верхній гілці відмінного кольору від ліхтаря на перехресті, адже такі ліхтарі були використані в першу чергу, а  $k \geq 3$  (при  $k = 1$  відповідь  $-1$ ). Якщо в нас на руках два ліхтаря одного кольору, то поставимо їх на нижню гілку і між ними поставимо останній ліхтар з верхньої гілки. Якщо в нас на руках один ліхтар, то поставимо його на нижню гілку разом з останнім ліхтарем з верхньої гілки. Якщо в нас на руках не лишилося жодного ліхтаря, то переставимо останні два ліхтарі з верхньої гілки на нижню гілку. Передостанній ліхтар з верхньої гілки був максимальним, отже його колір точно відмінний від ліхтаря на перехресті. Таким чином ми отримуємо розстановку, що задовольняє умові задачі. Максимальний і мінімальний ліхтарі в кожен момент часу можна шукати проходом по масиву. Тоді складність алгоритму  $O(n^2)$ .

**Блок 7.** Об'єднуємо 5 і 6 блоки разом.

**Блок 8.** Будемо підтримувати сет, де будемо зберігати пари поточна кількість ліхтарів кольору  $x$ ,  $x$ . Таким чином зможемо шукати максимальний і мінімальний ліхтарі за  $\log(n)$ . Загальна асимптотика  $O(n \log n)$ .

## Задача D. Козак Вус та дерево

**Автори та розробники:** Андрій Романов, Антон Ципко, Костянтин Денисов

**Блок 1.** Перевіримо, чи сума ваг ребер графа не перевищує  $k_1$ . Якщо ні, то відповідь 0, інакше відповідь 1.

**Блок 2.** Знайдемо для кожної вершину вигоду — суму ваг ребер, які з неї виходять. Тоді нам вигідно або зовсім не фарбувати вершини в чорний колір, або пофарбувати в чорний колір вершину з найбільшою вигодою. Перевіримо, чи підійде нам один з цих двох варіантів. Якщо жоден не підійшов, то відповідь 2.

**Блок 3.** Напишемо динаміку  $dp[x][y]$  — найменша можлива сума ваг яскравих ребер, якщо ми розглядаємо вершини від 1 до  $x$  і пофарбували  $y$  з них в чорний колір. Перехід  $dp[x][y] = \min(dp[x-1][y-1] + edge[x-1][x], dp[x-2][y-1] + edge[x-2][x-1] + edge[x-1][x], dp[x-1][y])$ , де  $edge[x-1][x]$  — вага ребра між вершинами  $x-1$  та  $x$ . Тоді  $dp[n][1], dp[n][2], \dots, dp[n][n]$  — значення мінімальних можливих сум ваг яскравих ребер, якщо пофарбовано  $i$  вершин. Застосувавши бінарний пошук на цьому масиві зможемо відповідати на запит за  $O(\log n)$ . Загальна складність  $O(n^2 + m \log n)$ .

**Блок 4.** Через те, що заданий всього один запит і  $n$  маленьке, можемо перебрати всі можливі комбінації вибору набору вершин, які ми пофарбуємо в чорний і знайти найкращу з них (тобто ту в якій залучена найменша кількість вершин). Складність  $O(n! \cdot n)$ .

**Блок 5.** Напишемо квадратну динаміку  $dp[v][cnt][flag]$  — мінімальна можлива вага яскравих ребер, якщо розглядати лише вершини піддерева  $v$ ,  $cnt$  з них пофарбували в чорний колір,  $flag=1$ , якщо  $v$  чорна і  $flag=0$ , якщо  $v$  біла. Будемо поступово приєднувати до вершини  $v$  піддерева її синів. Коли ми приєднуємо піддерево вершини  $to$ , то переберемо всі можливі комбінації кількості вершин, які ми пофарбуємо. В піддереві вершини  $v$  ми можемо пофарбувати в чорний колір від  $I = 0$  до  $I = n$  вершин, в піддереві вершини  $to$  від  $J = 0$  до  $J = n$  вершин. Переходами будуть:

- $dp[v][I+J][0] = \min(dp[v][I+J][0], dp[v][I][0] + dp[to][J][1]);$
- $dp[v][I+J][0] = \min(dp[v][I+J][0], dp[v][I][0] + dp[to][J][0] + edge[to][v]);$
- $dp[v][I+J][1] = \min(dp[v][I+J][1], dp[v][I][1] + dp[to][I][0]);$
- $dp[v][I+J][1] = \min(dp[v][I+J][1], dp[v][I][1] + dp[to][J][1]);$

Тепер побудуємо масив  $ans[cnt] = \min(dp[root][cnt][0], dp[root][cnt][1])$ , де  $root$  — корінь дерева.  $ans[cnt]$  — мінімальна можлива сума ваг яскравих ребер, якщо в чорний колір пофарбовано  $cnt$  вершин. Побудувавши даний масив можемо бінарним пошуком знаходити відповідь на кожен запит — знаходимо мінімальне таке  $cnt$ , що  $ans[cnt] \leq k_i$ . Таким чином складність цього розв'язку  $O(n^3 + m \log n)$ .

**Блок 6.** Помітимо, що  $I$  та  $J$  можемо перебирати не до  $n$ , а до  $cnt[v]$  і  $cnt[to]$  відповідно. Тут  $cnt[v]$  — поточний розмір піддерева вершини  $v$ ,  $cnt[to]$  — розмір піддерева вершини  $to$ . На перший погляд, може здатися, що складність розв'язку не змінилася, але насправді тепер ми підраховуємо  $dp$  за  $n \cdot n$  — перевірте це самостійно. Асимптотика рішення  $O(n^2 + m \cdot \log n)$ .

## Задача Е. Козак Вус та граф

**Автор та розробник: Антон Ципко**

**Блок 1.** Якщо  $k_i = 1$ , то потрібно вивести цю вершину. Інакше —  $-1$ .

**Блок 2.** В операціях другого типу можемо використовувати СНМ (систему неперетинних множин). В операціях першого типу можемо проходитися по всім вершинах і перевіряти, чи ця вершина належить множині. Для того, щоб перевірити, чи вершина знаходиться у множині, потрібно перевірити чи корінь цієї вершини у СНМ збігається з коренем запитаної вершини.

**Блок 3.** Можемо для кожного стану зберігати масив СНМ. Після кожної операції нам потрібно запам'ятати масив СНМ. Тоді, коли є операція другого типу, то нам потрібно скопіювати повністю масив, а потім виконати на ньому операцію. А коли є операція третього типу, то потрібно лише скопіювати правильний масив.

**Блок 4.** Обмеження означає, що компонента буде відрізком на масиві. Коли ми отримуємо запит другого типу, то нам потрібно знайти крайню вершину зліва, це можна зробити бінарним пошуком, а потім перевірити чи  $k$ -та вершина справа також знаходиться в цій же компоненті. Також можна зберігати відрізки у `set< pair<int, int> >`, а потім використовувати `lower_bound` для знаходження відповіді.

**Блок 5.** Можемо для кожної компоненти зберігати множину вершин в ній. Коли у нас є операція другого типу, нам потрібно додати з меншої за розміром множини у більшу. Цей метод називається «від меншого до більшого». Він дасть можливість виконати всі ці операції сумарно за  $O(n \log^2 n)$ . На операції першого типу потрібно знаходити  $k$ -ий елемент у множині.

Множину можна підтримувати за допомогою декартового дерева, або за допомогою спеціальної структури даних в C++, яка дуже схожа на `set`, але крім операцій вставки, також вміє шукати  $k$ -ий елемент.

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
tree_order_statistics_node_update> ordered_set;
// s.find_by_order(num) - returns iterator to the num-th element (0 <= num < s.size())
// s.order_of_key(key) - returns number of elements smaller than key
```

**Блок 6.** Можемо підтримувати персистентне дерево відрізків. Для операцій другого типу нам потрібно вміти присвоювати на відрізу. А для операцій першого типу потрібно вміти знаходити перший елемент, який має таке ж значення (початок компоненти). Дуже схожий метод до четвертого блоку.

**Блоки 7-9.** Ми можемо відповідати на запити оффлайн, тому ми можемо побудувати `dfs` на запитах. Тобто, у нас будуть вершини - запити. У нас в кожну вершину типу 1 чи 2 можна потрапити через попередню за номером вершину, а у  $i$ -ту вершину третього типу, можна потрапити лише з вершини  $x_i$ . Тобто, якщо  $t_i = 3$ , то у нас буде ребро  $(x_i, i)$ , якщо ж  $t_i \neq 3$ , то буде ребро  $(i - 1, i)$ . Такий `dfs` дозволить підтримувати певний стан, проте такий стан потрібно вміти оновлювати та відкочувати. Основна проблема саме у відкочуванні.

Давайте для початку розберемося, як це робити за  $O(nq \log n)$ . Будемо підтримувати СНМ, проте ми не будемо використовувати оптимізацію, у якій усі вершини будуть вести у корінь. Кожна вершина буде вести у свого прямого батька, а не в корінь. Коли у нас є операція другого типу, то, щоб об'єднати компоненти, нам потрібно під'єднати меншу компоненту до більшої. Тобто, нехай ми

об'єднуємо компоненти вершин  $v_i$  та  $u_i$ . Хай  $v'_i$  — корінь компоненти  $v_i$  в СНМ.  $u'_i$  — аналогічно для  $u_i$ . Також нехай компонента  $v'_i$  менша за компоненту  $u'_i$ . Тоді нам потрібно сказати, що батьком вершини  $v'_i$  є вершина  $u'_i$ . Потім, щоб скасувати це об'єднання, нам потрібно сказати, що батьком вершини  $v'_i$  є сама вершина  $v'_i$  (тобто, вона сама є коренем). Для операцій першого типу, ми можемо пройтися по всім вершинам і перевірити, у якій компоненті вона знаходиться. Потрібно буде вивести  $k$ -ту таку вершину. Для кожної вершини ми можемо знайти корінь компоненти за  $O(\log n)$  (згадуємо метод «від меншого до більшого» з п'ятого блоку). Отже, ми вміємо обробляти запит першого типу за  $O(n \log n)$ , а другого за  $O(\log n)$ .

Розіб'ємо усі вершини на  $\sqrt{n}$  блоків довжини  $\sqrt{n}$ . Для  $i$ -го блоку будемо зберігати кількість вершин у цьому блоці, які знаходяться в компоненті вершини  $j$ . Нехай це буде зміна  $c_{ij}$ . Якщо у нас є операція другого типу, то ми можемо кожен блок оновити за  $O(1)$ , додавши одне значення до іншого. Отже, за одну операцію другого типу нам потрібно  $O(\sqrt{n})$  часу, щоб оновити масив  $c$ . Стільки ж часу потрібно, щоб роз'єднати компоненти. Для виконання операції першого типу, будемо спочатку проходитися по всім блокам і дивитися, у якому блоці знаходиться наша шукана відповідь. Тут ми витратимо  $O(\sqrt{n})$  часу. Потім ми будемо перебирати усі вершини, так само як у попередньому абзаці, проте будемо перебирати не абсолютно всі вершини, а лише ті, що в цьому блоці. Отже, для такого нам потрібно  $O(\sqrt{n} \log n)$  часу. Сумарна асимптотика виходить  $O(q\sqrt{n} \log n)$ .

Зверніть увагу, що необов'язково використовувати саме  $\sqrt{n}$  як розмір блока. Нехай  $s$  — розмір блока. Тоді асимптотика вийде  $O(q \max(\frac{n}{s}, s \log n))$ .